

基于区间值直觉模糊集的距离测度

赵法信

(通化师范学院, 吉林 通化 134002)

摘 要: 区间值直觉模糊集是直觉模糊集的进一步推广, 具有比直觉模糊集更强大的模糊信息表达能力. 基于区间值直觉模糊集理论, 给出了三种基于海明距离、规范化海明距离、欧氏距离、规范化欧氏距离的扩展区间值直觉模糊集距离测度公式, 对它们进行了比较分析, 并给出了相应的定理和证明.

关键词: 模糊集; 直觉模糊集; 区间值直觉模糊集; 海明距离; 欧氏距离

中图分类号: TP18

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2010)02-0188-05

Distances Between Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets

ZHAO Fa-xin

(Tonghua Normal University, Tonghua 134002, China)

Abstract: Interval-valued intuitionistic fuzzy sets, as a further generalization of intuitionistic fuzzy sets, has more powerful ability to represent fuzzy information than intuitionistic fuzzy sets. Based on the interval-valued intuitionistic fuzzy set theory, three extended methods based on the well known Hamming distance, the Euclidean distance and their normalized counterparts for measuring distances between interval-valued intuitionistic fuzzy sets are given. Then the corresponding theorem and proof are given.

Key words: fuzzy set; intuitionistic fuzzy set; interval-valued intuitionistic fuzzy set; Hamming distance; Euclidean distance

1 引言

为处理现实世界中存在的不精确、不确定信息, Zadeh 于 1965 年提出了模糊集理论. Atanassov^[1]对模糊集理论进行了拓展, 提出了直觉模糊集理论. 由于直觉模糊集同时考虑了隶属度、非隶属度和犹豫度三方面信息, 因此, 它比传统的模糊集在处理模糊性和不确定性等方面更具灵活性和实用性. Atanassov 等^[2]对直觉模糊集进一步推广, 提出区间值直觉模糊集的概念. Atanassov^[3]定义了区间值直觉模糊集的一些基本运算法则. Bustince 等^[4]定义了区间值直觉模糊集的关联度, 并研究了区间值直觉模糊集关联性的两个分解定理. 徐泽水^[5]则对基于区间值直觉模糊集的模糊决策方法进行了研究.

目前直接模糊集已被国内外成功地应用于模糊

控制、决策分析、模式识别等领域, 而其中关键的技术之一就是怎样用相似度量去度量两个集合的相似程度, 但在许多情况下求相似度量都和距离有关. 区间值直觉模糊集作为直觉模糊集的扩展, 它更能描述和反映客观世界的本质特征. 然而, 目前讨论区间值直觉模糊集之间距离测度的相关文献却很少. 为此, 文中基于区间值直觉模糊集理论, 对其距离测度问题进行了研究, 将三种基于直觉模糊集的海明距离、欧几里得距离及其相应的规范化距离测度推广到区间值直觉模糊集, 对它们进行了比较分析, 并给出了相应的定理和证明.

2 直觉模糊集与区间值直觉模糊集

定义 1 (直觉模糊集) 设 U 为论域, 其中的任意一个元素用 u 表示. 则 U 上的一个直觉模糊集 A

收稿日期: 2008-07-18; 修回日期: 2008-11-16

基金项目: 吉林省科技发展计划项目(20080174); 吉林省教育厅“十一五”科学技术研究项目(吉教科合字[2007]第 214 号)

为:

$$A = \{\langle u, t_A(u), f_A(u) \rangle \mid u \in U\},$$

直觉模糊集 A 用一个隶属函数 $t_A(u)$ 和一个非隶属函数 $f_A(u)$ 表示, $t_A(u)$ 和 $f_A(u)$ 都将区间 $[0, 1]$ 中的一个实数与 U 中的每一个元素联系起来, 即

$$t_A(u): U \rightarrow [0, 1], f_A(u): U \rightarrow [0, 1], \text{ 且有 } 0 \leq t_A(u) + f_A(u) \leq 1, u \in U \text{ 成立.}$$

显然, 每一个一般模糊子集 $A = \{\langle u, t_A(u) \rangle \mid u \in U\}$ 是直觉模糊子集 $A = \{\langle u, t_A(u), 1 - t_A(u) \rangle \mid u \in U\}$ 的特殊情况, 此时有 $\pi_A(u) = 1 - t_A(u) - (1 - t_A(u)) = 0$, $\pi_A(u)$ 为 A 中 u 的犹豫度. 因而, 由 Atanassov 提出的直觉模糊集是传统模糊集的一种扩展. 非隶属度函数的引入, 使得直觉模糊集能够更加细腻地描述和刻画现实世界的模糊性本质. 而区间值直觉模糊集是直觉模糊集的进一步扩展, 具有更强的表达不确定数据和模糊数据的能力, 它更能描述和反映客观世界的本质特征.

定义2 (区间值直觉模糊集) 设 U 为论域, 其中的任意一个元素用 u 表示. 则 U 上的一个区间值直觉模糊集 A 定义为:

$$A = \{\langle u, t_A(u), f_A(u) \rangle \mid u \in U\},$$

区间值模糊集合 $t_A(u)$ 和 $f_A(u)$ 分别是 A 的隶属函数和非隶属函数. 其中,

$$t_A(u) = [t_A^-(u), t_A^+(u)] \subseteq [0, 1], f_A(u) = [f_A^-(u), f_A^+(u)] \subseteq [0, 1], \text{ 且 } t_A^+(u) + f_A^+(u) \leq 1$$

为方便起见, 将定义在论域 U 上的区间值直接模糊集记作 $IVIF(U)$. 并将区间值直觉模糊集的犹豫度定义为:

$$\pi_A(u) = 1 - t_A(u) - f_A(u) = [1 - t_A^+(u) - f_A^+(u), 1 - t_A^-(u) - f_A^-(u)].$$

3 距离的度量准则

定义3 设 $A, B \in IVIF(U)$, 若函数 $d: IVIF(U) \times IVIF(U) \rightarrow R^+ \cup \{0\}$

满足条件:

$$\textcircled{1} d(A, B) \geq 0;$$

$$\textcircled{2} A = B \Leftrightarrow d(A, B) = 0;$$

$$\textcircled{3} d(A, B) = d(B, A);$$

$$\textcircled{4} \text{ 对任意的 } A, B, C \in IVIF(U), d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C).$$

则 $d(A, B)$ 是区间值直觉模糊集 A 与 B 之间的距离.

4 区间值直觉模糊集之间的距离测度

下面将根据区间值直接模糊集理论, 把分别由 Grzegorzewski^[6], Burillo 和 Bustince^[7], Szmidt 和 Kacprzyk^[8]所提出的基于直接模糊集距离度量方法扩展到区间值直接模糊集, 并给出相应的定理和证明.

4.1 基于 Grzegorzewski 距离的扩展 IVIF 距离测度

在文献[6]中, Grzegorzewski 提出了一种基于 Hausdorff 测度的直接模糊集距离度量方法, 该方法具有很好的分辨率. 在这里首先将这种方法扩展为区间直接模糊集的 Hausdorff 距离, 其定义如下.

定义4 设 A, B 是论域 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 上的 IVIF 集合, 其中,

$$A = \{\langle u_i, [t_A^-(u_i), t_A^+(u_i)], [f_A^-(u_i), f_A^+(u_i)] \rangle \mid u_i \in U\},$$

$$B = \{\langle u_i, [t_B^-(u_i), t_B^+(u_i)], [f_B^-(u_i), f_B^+(u_i)] \rangle \mid u_i \in U\},$$

则有:

(1) 海明距离 $d_h(A, B)$

$$d_h(A, B) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\max\{|t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i)|, |f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i)|\} + \max\{|t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i)|, |f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i)|\}]$$

(2) 规范化的海明距离 $l_h(A, B)$

$$l_h(A, B) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [\max\{|t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i)|, |f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i)|\} + \max\{|t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i)|, |f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i)|\}]$$

(3) 欧几里得距离 $e_h(A, B)$

$$e_h(A, B) = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\max\{(t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i))^2, (f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i))^2\} + \max\{(t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i))^2, (f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i))^2\}] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

(4) 规范化的欧几里得距离 $q_h(A, B)$

$$q_h(A, B) = \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [\max\{(t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i))^2, (f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i))^2\} + \max\{(t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i))^2, (f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i))^2\}] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

定理1 设 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 是有限论域, 则 $d_h(A, B), l_h(A, B), e_h(A, B), q_h(A, B)$ 是距离度量.

证明: 以 $e_h(A, B)$ 为例.

设 $A = \{\langle u_i, [t_A^-(u_i), t_A^+(u_i)], [f_A^-(u_i), f_A^+(u_i)] \rangle \mid u_i \in U\}$, $B = \{\langle u_i, [t_B^-(u_i), t_B^+(u_i)], [f_B^-(u_i), f_B^+(u_i)] \rangle \mid u_i \in U\}$ 和 $C = \{\langle u_i, [t_C^-(u_i), t_C^+(u_i)], [f_C^-(u_i), f_C^+(u_i)] \rangle \mid u_i \in U\}$ 是论域 U 上的区间值直觉模糊集, 则有

(1) 根据任意实数的平方结果为非负数, 必有 $e_h(A, B) \geq 0$. 性质 ① 成立.

(2) 当 $A = B$ 时, 有 $t_A^-(u_i) = t_B^-(u_i)$, $f_A^-(u_i) = f_B^-(u_i)$, $t_A^+(u_i) = t_B^+(u_i)$, $f_A^+(u_i) = f_B^+(u_i)$, 因而有 $e_h(A, B) = 0$. 当 $e_h(A, B) = 0$ 时, 有 $\max\{(t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i))^2, (f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i))^2\} = 0$, $\max\{(t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i))^2, (f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i))^2\} = 0$. 由此可得 $t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i) = 0$, $f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i) = 0$, $t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i) = 0$, $f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i) = 0$, 因而有 $A = B$. 性质 ② 成立.

(3) 由于

$$\begin{aligned}(t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i))^2 &= (t_B^-(u_i) - t_A^-(u_i))^2, \\(f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i))^2 &= (f_B^-(u_i) - f_A^-(u_i))^2, \\(t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i))^2 &= (t_B^+(u_i) - t_A^+(u_i))^2, \\(f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i))^2 &= (f_B^+(u_i) - f_A^+(u_i))^2,\end{aligned}$$

显然有 $e_h(A, B) = e_h(B, A)$. 性质 ③ 成立.

(4) 由于对于任意非负数 $a_i, b_i, c_i, d_i (i = 1, 2, 3)$, 当 $a_1 + a_2 \geq a_3$, $b_1 + b_2 \geq b_3$, $c_1 + c_2 \geq c_3$, $d_1 + d_2 \geq d_3$ 成立时, 有 $\max\{a_1, b_1\} + \max\{a_2, b_2\} + \max\{c_1, d_1\} + \max\{c_2, d_2\} \geq \max\{a_3, b_3\} + \max\{c_3, d_3\}$ 成立, 由此可得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n [\max\{(t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i))^2, (f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i))^2\} + \max\{(t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i))^2, (f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i))^2\}] \\&+ \sum_{i=1}^n [\max\{(t_B^-(u_i) - t_C^-(u_i))^2, (f_B^-(u_i) - f_C^-(u_i))^2\} + \max\{(t_B^+(u_i) - t_C^+(u_i))^2, (f_B^+(u_i) - f_C^+(u_i))^2\}] \\&\geq \sum_{i=1}^n [\max\{(t_A^-(u_i) - t_C^-(u_i))^2, (f_A^-(u_i) - f_C^-(u_i))^2\} + \max\{(t_A^+(u_i) - t_C^+(u_i))^2, (f_A^+(u_i) - f_C^+(u_i))^2\}]\end{aligned}$$

因而有 $e_h(A, B) + e_h(B, C) \geq e_h(A, C)$. 性质 ④ 成立.

定理 2 设 A, B 是论域 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 上的任意两个 IVIF 集合, 其中

$$A = \{\langle u_i, [t_A^-(u_i), t_A^+(u_i)], [f_A^-(u_i),$$

$$f_A^+(u_i)] \rangle \mid u_i \in U\},$$

$$B = \{\langle u_i, [t_B^-(u_i), t_B^+(u_i)], [f_B^-(u_i), f_B^+(u_i)] \rangle \mid u_i \in U\},$$

则有下列不等式成立:

$$d_h(A, B) \leq n,$$

$$l_h(A, B) \leq 1,$$

$$e_h(A, B) \leq \sqrt{n},$$

$$q_h(A, B) \leq 1.$$

证明: 对每一个 $u_i \in U$, 因为 $|t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i)| \leq 1$, $|f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i)| \leq 1$, $|t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i)| \leq 1$, $|f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i)| \leq 1$, 故有

$$d_h(A, B) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [1 + 1] = n,$$

$$l_h(A, B) \leq \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [1 + 1] = 1,$$

$$e_h(A, B) \leq \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [1 + 1]} = \sqrt{n},$$

$$q_h(A, B) \leq \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [1 + 1]} = 1.$$

4.2 基于 Burillo 距离的扩展 IVIF 距离测度

在文献[7]中, Burillo 和 Bustince 将海明距离、欧几里得距离以及它们相应的规范化形式直接扩展为直觉模糊集距离. 将这种思想应用到区间值直觉模糊集上, 也可以得到一组扩展的距离公式, 其定义如下:

定义 5 设 A, B 是论域 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 上的 IVIF 集合, 其中,

$$A = \{\langle u_i, [t_A^-(u_i), t_A^+(u_i)], [f_A^-(u_i), f_A^+(u_i)] \rangle \mid u_i \in U\},$$

$$B = \{\langle u_i, [t_B^-(u_i), t_B^+(u_i)], [f_B^-(u_i), f_B^+(u_i)] \rangle \mid u_i \in U\},$$

则有

(1) 海明距离 $d'(A, B)$

$$\begin{aligned}d'(A, B) &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n [|t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i)| + |t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i)| + |f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i)| + |f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i)|]\end{aligned}$$

(2) 规范化的海明距离 $l'(A, B)$

$$\begin{aligned}l'(A, B) &= \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n [|t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i)| + |t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i)| + |f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i)| + |f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i)|]\end{aligned}$$

(3) 欧几里得距离 $e'(A, B)$

$$e'(A, B) = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n [(t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i))^2 + (t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i))^2 + (f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i))^2 + (f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i))^2] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

(4) 规范化的欧几里得距离 $q'(A, B)$

$$q'(A, B) = \left\{ \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n [(t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i))^2 + (t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i))^2 + (f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i))^2 + (f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i))^2] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

定理3 设 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 是有限论域, 则 $d'(A, B), l'(A, B), e'(A, B), q'(A, B)$ 是距离度量.

证明过程参照定理1.

4.3 基于 Szmidt 距离的扩展 IVIF 距离测度

Szmidt 和 Kacprzyk 在文献[8]中根据直觉模糊集的几何解释, 在定义直觉模糊集的距离时, 将直接模糊集的隶属度函数 $t(u)$ 、非隶属度函数 $f(u)$ 和直接犹豫度 $\pi_A(u)$ 这三个参数皆考虑在内. 下面将这种思想扩展到区间值直觉模糊集的距离定义中, 具体定义如下:

定义6 设 A, B 是论域 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 上的 IVIF 集合, 其中,

$$A = \{ \langle u_i, [t_A^-(u_i), t_A^+(u_i)], [f_A^-(u_i), f_A^+(u_i)] \rangle \mid u_i \in U \},$$

$$B = \{ \langle u_i, [t_B^-(u_i), t_B^+(u_i)], [f_B^-(u_i), f_B^+(u_i)] \rangle \mid u_i \in U \},$$

则有

$$\pi_A(u) = 1 - t_A(u) - f_A(u) = [1 - t_A^+(u) - f_A^+(u), 1 - t_A^-(u) - f_A^-(u)] = [\pi_A^-(u), \pi_A^+(u)]$$

$$\pi_B(u) = 1 - t_B(u) - f_B(u) = [1 - t_B^+(u) - f_B^+(u), 1 - t_B^-(u) - f_B^-(u)] = [\pi_B^-(u), \pi_B^+(u)]$$

则有

(1) 海明距离 $d''(A, B)$

$$d''(A, B) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n [|t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i)| + |t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i)| + |f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i)| + |f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i)| + |\pi_A^-(u_i) - \pi_B^-(u_i)| + |\pi_A^+(u_i) - \pi_B^+(u_i)|]$$

(2) 规范化的海明距离 $l''(A, B)$

$$l''(A, B) = \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n [|t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i)| + |t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i)| + |f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i)| +$$

$$|f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i)| + |\pi_A^-(u_i) - \pi_B^-(u_i)| + |\pi_A^+(u_i) - \pi_B^+(u_i)|]$$

(3) 欧几里得距离 $e''(A, B)$

$$e''(A, B) = \left\{ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n [(t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i))^2 + (t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i))^2 + (f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i))^2 + (f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i))^2 + (\pi_A^-(u_i) - \pi_B^-(u_i))^2 + (\pi_A^+(u_i) - \pi_B^+(u_i))^2] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

(4) 规范化的欧几里得距离 $q''(A, B)$

$$q''(A, B) = \left\{ \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n [(t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i))^2 + (t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i))^2 + (f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i))^2 + (f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i))^2 + (\pi_A^-(u_i) - \pi_B^-(u_i))^2 + (\pi_A^+(u_i) - \pi_B^+(u_i))^2] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

定理4 设 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 是有限论域, 则 $d''(A, B), l''(A, B), e''(A, B), q''(A, B)$ 是距离度量.

证明过程参照定理1.

定理5 设 A, B 是论域 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 上的任意两个 IVIF 集合, 其中

$$A = \{ \langle u_i, [t_A^-(u_i), t_A^+(u_i)], [f_A^-(u_i), f_A^+(u_i)] \rangle \mid u_i \in U \},$$

$$B = \{ \langle u_i, [t_B^-(u_i), t_B^+(u_i)], [f_B^-(u_i), f_B^+(u_i)] \rangle \mid u_i \in U \},$$

则有下列不等式成立:

$$d'(A, B) \leq d_h(A, B) \leq d''(A, B),$$

$$l'(A, B) \leq l_h(A, B) \leq l''(A, B),$$

$$e'(A, B) \leq e_h(A, B) \leq e''(A, B),$$

$$q'(A, B) \leq q_h(A, B) \leq q''(A, B).$$

证明: 在这里仅给出 e_h 证明.

因为对于任意 a, b, c, d 四个数字, 都有 $(a + b + c + d)/4 \leq (\max\{a, b\} + \max\{c, d\})/2$ 成立, 故有 $e'(A, B) \leq e_h(A, B)$ 成立. 再者, 因为对每一个 $u_i \in U$, 都有 $\pi_A^-(u) = 1 - t_A^+(u) - f_A^+(u), \pi_A^+(u) = 1 - t_A^-(u) - f_A^-(u), \pi_B^-(u) = 1 - t_B^+(u) - f_B^+(u), \pi_B^+(u) = 1 - t_B^-(u) - f_B^-(u)$. 因而有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} [(t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i))^2 + (t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i))^2 \\ & + (f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i))^2 + (f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i))^2 + \\ & + (\pi_A^-(u_i) - \pi_B^-(u_i))^2 + (\pi_A^+(u_i) - \pi_B^+(u_i))^2] \\ & = \frac{1}{4} [(t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i))^2 + (t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i))^2 + \\ & + (f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i))^2 + (f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i))^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (t_B^+(u_i) + f_B^+(u_i) - t_A^+(u_i) - f_A^+(u_i))^2 + (t_B^-(u_i) \\
& + f_B^-(u_i) - t_A^-(u_i) - f_A^-(u_i))^2 \\
& = \frac{1}{2} [(t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i))^2 + (f_A^-(u_i) - f_B^-(u_i))^2 + \\
& (t_B^-(u_i) - t_A^-(u_i))(f_B^-(u_i) - f_A^-(u_i)) + (t_A^+(u_i) - \\
& t_B^+(u_i))^2 + (f_A^+(u_i) - f_B^+(u_i))^2 + (t_B^+(u_i) - \\
& t_A^+(u_i))(f_B^+(u_i) - f_A^+(u_i))] \\
& \geq \frac{1}{2} [\max\{(t_A^-(u_i) - t_B^-(u_i))^2 + (f_A^-(u_i) - \\
& f_B^-(u_i))^2\} + \max\{(t_A^+(u_i) - t_B^+(u_i))^2 + (f_A^+(u_i) - \\
& f_B^+(u_i))^2\}]
\end{aligned}$$

故有 $e''(A, B) \geq e_h(A, B)$.

综上可得 $e'(A, B) \leq e_h(A, B) \leq e''(A, B)$, 命题得证.

应当指出的是, 直觉模糊集作为一般模糊集的扩展, 当犹豫度 $\pi_A(u) = 1 - t_A(u) - (1 - t_A(u)) = 0$ 时, 其等价于相应的模糊子集. 同样可以验证, 文中所提出的三种扩展区间值直觉模糊集距离测度, 在特定的情况下 (IVIF 子集等同 $A = \{\langle u, t_A(u), \overline{t_A(u)} \rangle \mid u \in U\}$), 分别等价于文献[6-8]中所对应的直觉模糊集距离测度.

5 结束语

区间值直觉模糊集作为直觉模糊集的进一步扩展, 具有更强的表达不确定数据和模糊数据的能力, 更能描述和反映客观世界的本质特征. 文中基于区间值直觉模糊集, 给出了三种扩展的区间值直觉模糊集距离测度公式, 并对它们进行了比较分析, 给出了相应的定理和证明, 从而为进一步深化区间值直

觉模糊集在模糊控制、决策分析、模式识别等领域的应用奠定了一定的基础.

参考文献:

- [1] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986(20):87-96.
- [2] Atanassov K, Gargov G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989(31):343-349.
- [3] Atanassov K. Operators over interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 64(2):159-174.
- [4] Bustince H, Burillo P. Correlation of interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 74(2):237-244.
- [5] 徐泽水. 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用[J]. 控制与决策, 2007, 22(2): 215-219.
- [6] Grzegorzewski P. Distances between intuitionistic fuzzy sets and/or interval-valued fuzzy sets based on the hausdorff metric [J]. Fuzzy Sets Systems, 2004(148):319-328.
- [7] Burillo P, Bustince H. Entropy on intuitionistic fuzzy sets and interval-valued fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996(78):305-316.
- [8] Szmidt E, Kacprzyk J. Distances between intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000(114):505-518.

作者简介:

赵法信 男, (1974-), 博士, 工程师. 研究方向为智能数据处理.